UWAGI NA TEMAT NAUCZANIA MECHANIKI KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

Tomasz Lewiński

Politechnika Warszawska
Wydział Inżynierii Lądowej
Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich
Al.Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa

1. Wstęp

Proponowane obecnie podręczniki mechaniki konstrukcji prętowych dla wydziałów budownictwa, przykładowo [2,4], omawiają metody analizy deformacji belek, kratownic i bardzo prostych ram złożonych z kilku prętów wzajemnie ortogonalnych. Do takich zadań stosuje się m.in. metodę przemieszczeń; sugeruje się w ten sposób, że bardziej złożone zagadnienia wymagają stosowania komercyjnych systemów MES. Doświadczenie Zakładu Mechaniki Budowli jest inne: metodę przemieszczeń można z powodzeniem stosować w znacznie trudniejszych zagadnieniach ram nieortogonalnych, nie tylko w zakresie statyki, lecz także stateczności, zginania z udziałem dużych sił osiowych oraz drgań harmonicznych.

Ten referat dotyczy klasycznej teorii prętów i metod opartych na tej teorii odnoszących się do układów prętowych, takich jak ramy i ruszty. W referacie porusza się zagadnienia związane z

a) relacjami między równaniami równowagi pręta o skończonej długości a równaniem pracy wirtualnej
b) wzorem Maxwella-Mohra, rozumianym jako wariacyjne równanie zgodności przemieszczeń i odkształceń
c) uogólnieniem równania Maxwella-Mohra i równania pracy wirtualnej na układ prętowy, czyli konkatenacją równań prętowych do postaci równań opisujących zachowanie układu prętowego
d) sensem tzw. łańcuchów kinematycznych w zagadnieniach statyki, stateczności i dynamiki ram płaskich
e) metodami opisu drgań harmonicznych ram o dowolnym, punktowym rozkładzie masy.

Niniejszy referat jest inspirowany doświadczeniami dydaktycznymi autora z lat 1979-2006 zdobywanymi przy prowadzeniu ćwiczeń z mechaniki budowli a od roku 2001 - także wykładów z tej tematyki dla studentów roku trzeciego studiów dziennych naszego Wydziału.

Uwagi terminologiczne

W tej pracy przez równanie wariacyjne rozumie się takie równanie, w którym występuje dowolna funkcja, nazywana niekiedy funkcją próbną lub z angielska testową; równanie jest natomiast lokalne, gdy w równaniu tym występuje dowolny punkt, utożsamiany zazwyczaj ze współrzędną x . Inaczej mówiąc, jeśli kwantyfikator *dla każdego* dotyczy funkcji to mówimy o równaniu wariacyjnym a gdy kwantyfikator *dla każdego* dotyczy współrzędnej, to mówimy o równaniu lokalnym. Kwantyfikator *dla każdego* nie będzie jawnie zapisywany, gdyż wystarczy powiedzieć, że funkcja próbna lub współrzędna są dowolne. W pracach matematycznych nie występuje dowolność, gdyż określa się zawsze warunki regularności funkcji próbnych; w takich pracach kwantyfikator *dla każdego* mówi, że funkcja próbna jest dowolna, ale z danego zbioru. W pracach fizyków i inżynierów tych zbiorów nie określa się, gdyż ich definicje są dość trudne, zresztą nie tylko zależą od zagadnienia fizycznego, lecz także od woli autora. Tak więc jest powód dodatkowy aby pomijać w takich pracach jak ta kwantyfikator *dla każdego*- nie podajemy bowiem z jakiego zbioru dobieramy funkcje próbne. Jednak niepodawanie jawne definicji tych zbiorów nie umniejsza wartości sformułowań wariacyjnych, gdyż ich znaczenie daleko wybiega poza matematyczny formalizm.

Funkcje próbne, które występują w równaniach wariacyjnych są niekiedy w literaturze, także tej kierowanej do studentów, nazywane *wirtualnymi*, co nic nie wnosi, nic nie tłumaczy, niczemu nie pomaga. Rzecz w tym, że w języku polskim słowo *wirtualny* jest już nieużywane w swoim starym znaczeniu: *mogący zaistnieć,* por.[9], natomiast znaczenie informatyczne jest tu mylące.

Równanie równowagi w ujęciu wariacyjnym jest niekiedy nazywane równaniem *pracy* wirtualnej, gdyż w równaniu tym pojawia się pod całką iloczyn sił wewnętrznych i odkształceń stowarzyszonych z polami próbnymi, który można interpretować jako pracę wzajemną. Niemcy używają tu własnego określenia *Schubenergie* - energia przesunięta - a nie wzajemna.

2. Równanie pracy wirtualnej pręta prostego jako konsekwencja warunków równowagi pręta o skończonej długości

Wykładowcy mechaniki konstrukcji prętowych są przyzwyczajeni do wyprowadzania równania pracy wirtualnej pręta prostego na podstawie równań różniczkowych równowagi

$$\frac{dN}{dx} + p(x) = 0\,, \quad \frac{dT}{dx} + q(x) = 0\,, \quad \frac{dM}{dx} - T(x) = 0 \tag{1}$$

gdzie $p,\ q$ są intensywnościami obciążeń podłużnych i poprzecznych. Powyższe równania wiążą siłę podłużną N, poprzeczną T i moment M. Równania (1) trzeba uzupełnić o warunki równowagi brzegowej. Jeśli np. koniec $x=l$ jest swobodny i obciążony siłami: podłużną P, poprzeczną Q i momentem M_0, to warunki równowagi wyciętego końca mają postać

$$N(l-0) - P = 0, \quad T(l-0) - Q = 0\,, \quad M(l-0) - M_0 = 0 \tag{2}$$

gdzie $f(l\text{-}0)$ oznacza lewostronną granicę funkcji f w $x=l$. Przyjmijmy, że koniec x=0 jest utwierdzony. Niech

$$\beta[f] = -\frac{df}{dx}, \quad \varepsilon[f] = \frac{df}{dx}, \quad \kappa[f] = \varepsilon[\beta[f]] = -\frac{d^2 f}{dx^2} \tag{3}$$

Ortogonalizacja równań (1) dowolnymi funkcjami $\overline{u}(x), \overline{w}(x), \beta[\overline{w}]$, proste całkowanie przez części i uwzględnienie warunków (2) daje wariacyjne równanie równowagi

$$\overline{L}_w = \overline{L}_z, \tag{4}$$

gdzie

$$\overline{L}_w = \int_0^l (N\varepsilon[\overline{u}] + M\kappa[\overline{w}])dx \tag{5}$$

$$\overline{L}_z = \int_0^l (p\overline{u} + q\overline{w})dx + P\overline{u}(l) + Q\overline{w}(l) + M_0\beta[\overline{w}](l) - N(0)\overline{u}(0) - T(0)\overline{w}(0) - M(0)\beta[\overline{w}](0) \tag{6}$$

Funkcje $\overline{u}, \overline{w}$ można traktować tu jako dowolne, gdyż nie będziemy zajmować się warunkami regularności. Można narzucić na $\overline{u}, \overline{w}$ warunki kinematyczne brzegowe i wówczas po prawej stronie (3) znikają trzy ostatnie składniki zawierające wartości reakcji w *x=0.*
Równania (1) nie są w pierwotnej postaci. Można je łatwo wyprowadzić z równań równowagi wycinka pręta od 0 do x .

Zdefiniujmy wypadkowe obciążenia przęsłowego

$$P_p(x) = \int_0^x p(\overline{x})d\overline{x}, \quad M_q(x) = \int_0^x \overline{x}q(\overline{x})d\overline{x}, \quad Q_q(x) = \int_0^x q(\overline{x})d\overline{x} \tag{7}$$

Warunki równowagi pręta na odcinku (0,x) mają postać

$$N(x) = N(0) - P_p(x), \quad T(x) = T(0) - Q_q(x), \quad M(x) = M(0) + M_q(x) + xT(x) \tag{8}$$

<u>Naszym celem jest otrzymanie równości (4) bezpośrednio z równań (8)</u>. W tym celu będziemy przekształcać wyrażenie (5). Podstawienie (8) do (5) daje

$$\overline{L}_w = \int_0^l \left((N(0) - P_p(x))\varepsilon[\overline{u}] + (M(0) + x(T(0) - Q_q(x)) + M_q(x))\varepsilon[\overline{\beta}]\right)dx \tag{9}$$

czyli

$$\overline{L}_w = N(0)\overline{u}\,\Big|_0^l + M(0)\overline{\beta}\,\Big|_0^l + T(0)\int_0^l x\frac{d\overline{\beta}}{dx}dx + \int_0^l \left[(M_q(x) - xQ_q(x))\frac{d\overline{\beta}}{dx} - P_p(x)\frac{d\overline{u}}{dx}\right]dx \tag{10}$$

Całkujemy teraz przez części wyrażenie (10) z wykorzystaniem równości

$$\frac{dP_p}{dx} = p(x), \quad \frac{dQ_q}{dx} = q(x), \quad \frac{d(M_q(x) - xQ_q(x))}{dx} = -Q_q(x), \tag{11}$$

$$P_p(0)=0,\ Q_q(0)=0,\ M_q(0)=0 \tag{12a}$$

$$N(l)=N(0)-P_p(l),\qquad M(l)=M(0)+M_q(l)+lT(l),\qquad T(l)=T(0)-Q_q(l) \tag{12b}$$

oraz równości (2) i znajdujemy (6).

Widać więc, że równania równowagi (8) implikują równość wariacyjną (4). Z równań (1) nie korzystaliśmy. Wyprowadzenie powiodło się.

Powstaje pytanie, czy analogiczne wyprowadzenie można podać w ogólnym przypadku ciała trójwymiarowego. Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje Antman [1] na str.412. Równoważność zasady pracy wirtualnej i prawa zachowania pędu wykazali S.Antman i J.E.Osborn w 1979; w zagadnieniu statyki twierdzenie to pozostaje prawdziwe.

3. Wzór Maxwella-Mohra jako warunek zgodności odkształceń i przemieszczeń

Wykładowcy mechaniki budowli zwykli tłumaczyć wzór Maxwella-Mohra na podstawie równania (4). Otóż postawienie kresek nad wielkościami bez kresek i usunięcie kresek z wielkości próbnych prowadzi do tego wzoru. Takie uzasadnienie ważnej formuły Maxwella-Mohra ma dwie wady dydaktyczne:

a) wzór ten powinien być przeformułowaniem równań zgodności deformacji i przemieszczeń, czyli równań

$$\varepsilon=\frac{du}{dx},\qquad \beta=-\frac{dw}{dx},\qquad \kappa=\frac{d\beta}{dx} \tag{13}$$

b) wielkości $\overline{N},\overline{M},\overline{T},\overline{p},\overline{q}$ nie muszą dotyczyć danego pręta, lecz pręta z usuniętymi więzami brzegowymi; np. gdy pręt dany jest statycznie niewyznaczalny, wielkości $\overline{N},\overline{M},\overline{T},\overline{p},\overline{q}$ mogą dotyczyć pręta statycznie wyznaczalnego, jednego ze schematów podstawowych. Dzięki temu wzór Maxwella-Mohra uczy jak obliczać przemieszczenia w prętach statycznie niewyznaczalnych, bez odwoływania się do tzw. twierdzenia redukcyjnego.

Omówimy wyprowadzenie wzoru Maxwella-Mohra biorąc za punkt wyjścia związki (13). Niech funkcje $\overline{N},\overline{M},\overline{T},\overline{p},\overline{q}$ będą związane równaniami postaci (1) i dodatkowo niech $\overline{N},\overline{M},\overline{T}$ spełniają warunki równowagi obciążonych końców pręta. Mówiąc krótko, pola $\overline{N},\overline{M},\overline{T},\overline{p},\overline{q}$ maja być statycznie dopuszczalne, ale nie muszą dotyczyć tych samych warunków kinematycznych, co w pręcie badanym. Warunki kinematyczne nie są bowiem pojęciem zawartym w definicji statycznej dopuszczalności.

Pierwsze z równań (13) mnożymy stronami przez $\overline{N}$, drugie - przez $\overline{T}$ a trzecie - przez $\overline{M}$. Po dodaniu stronami, kilku prostych przekształceniach i skorzystaniu ze statycznej dopuszczalności znajdziemy dość łatwo:

$$\overline{N}\varepsilon+\overline{M}\kappa=\overline{p}u+\overline{q}w+\frac{d}{dx}\left(\overline{N}u+\overline{T}w+\overline{M}\beta\right) \tag{14}$$

Scałkowanie od 0 do l daje wzór Maxwella-Mohra w odniesieniu do jednego pręta

$$\int_0^l (\overline{N}\varepsilon+\overline{M}\kappa)dx=\int_0^l (\overline{p}u+\overline{q}w)dx+\left(\overline{N}u+\overline{T}w+\overline{M}\beta\right)\Big|_0^l \tag{15}$$

Kwantyfikator *dla każdego* dotyczy teraz $\overline{p}, \overline{q}$, próbnych obciążeń końców oraz schematu pręta, gdyż mamy do wyboru kilka schematów warunków brzegowych. Wielkości $\overline{N}, \overline{M}, \overline{T}$ podlegają wyznaczeniu. Obciążenia próbne mogą być obrane jako punktowe, wtedy wzór (15) daje możliwość obliczania przemieszczeń w wybranych przekrojach pręta. Zauważmy, że wzór (15) uczy jak scałkować odkształcenia aby otrzymać wybrane przemieszczenia i jest znacznie bardziej elastyczny niż punkt wyjścia: (13), gdyż całkowanie równań (13) wprowadza natychmiast stałe całkowania, wcale niełatwe do wyznaczenia. Wzór Maxwella-Mohra wyraża się całką oznaczoną a nie nieoznaczoną, daje więc formułę jednoznaczną. Mówi jak przyjąć funkcje wagowe tego całkowania aby otrzymać szukane przemieszczenie.

4. Twierdzenia dotyczące układów prętowych

Równania (4) i (15) uogólniają się na przypadek układów prętowych; wówczas pola próbne w (4) muszą spełniać warunki zgodności przemieszczeń w węzłach a pola próbne w (15)- warunki równowagi węzłów. Zazwyczaj wyprowadzeń tych nie podaje się studentom, a szkoda. Szkic wyprowadzenia uogólnienia (4) na płaski układ prętowy jest następujący: zapisujemy równanie (4) pręt za prętem, zapisujemy trzy równania równowagi w każdym węźle, sumujemy powyższe stronami. Z uwagi na kinematyczną dopuszczalność $\overline{u}, \overline{w}$ w węzłach po prawej stronie znikną prace wirtualne sił wewnętrznych przywęzłowych a pozostaną tylko prace wirtualne obciążeń zewnętrznych skupionych w węzłach. Zatem $\overline{L}_z$ przyjmie postać pracy wirtualnej wszystkich obciążeń i reakcji. Suma całek po lewej stronie zapisuje się jako całka po wszystkich prętach konstrukcji.

Z uwagi na znikanie pracy wirtualnej sił przywęzłowych proces sumowania prawych stron równań (4) może być nazywany *konkatenacją*, pod warunkiem że uznamy, iż takie nawiązanie do łacińskiego odpowiednika polskiego terminu: *wiązanie łańcuchem* może pomóc naszym wysiłkom dydaktycznym. Istotnie, proces sumowania po prętach jest tu wiązaniem poszczególnym ogniw pewnego łańcucha związków matematycznych; nie jest to proste sumowanie równań stronami.

5. Dlaczego nie pojawiają się sprzeczności przy wyznaczaniu sił podłużnych z równań równowagi węzłów w ramach przesuwnych z prętów niewydłużalnych ?

Zmarły w tym roku ś.p. Profesor naszego Instytutu Zbigniew Reipert odpowiedział na powyższe pytanie w sposób lapidarny, mniej więcej następująco: siłami poprzecznymi należy obciążyć kratownicę zastępczą. Ta kratownica jest w równowadze, gdyż badana rama była zrównoważona. Siły w kratownicy zastępczej da się więc wyznaczyć i są równe siłom podłużnym w ramie. Powyższa odpowiedź jest poprawna, ale brzmi dziwnie i wymaga wyjaśnień. Rozpocznijmy od przypomnienia, że zadanie statyki kratownicy kinematycznie zmiennej jest rozwiązywalne gdy $\overline{L}(P_1, P_2, ..., P_n) = 0$, gdzie $\overline{L}$ jest pracą wirtualna sił skupionych przyłożonych w węzłach wykonywaną na wszelkich przemieszczeniach zerujących odkształcenia podłużne prętów- są to tzw. mody zero-energetyczne kratownicy w ramach teorii liniowej. Równań $\overline{L} = 0$ jest więc tyle ile niezależnych planów przemieszczeń; powiedzmy, że jest s takich planów. Zatem s równań $\overline{L} = 0$ można traktować jako s równań zgodności równań równowagi węzłów kratownicy. Jeśli mamy w węzłów i e prętów to tych równań jest $2w$ a niewiadomych e. W kratownicy kinematycznie zmiennej jest $2w>e$, czyli równań jest za dużo. Warunki $\overline{L} = 0$ w liczbie s narzucają także warunki na prawe strony $2w$

równań, aby e niewiadomych dało się wyznaczyć jednoznacznie i bez sprzeczności. Oczywiście te warunki niesprzeczności można otrzymać z $2w$ równań na drodze formalnej, ale zapis s równań $\overline{L}=0$ jest szybszy i pouczający.

Rozumiemy więc, że s warunków $\overline{L}=0$ wiążących obciążenia skupione w węzłach kratownicy tak nakłada warunki na te obciążenia, że zadanie wyznaczenia sił podłużnych z równań równowagi węzłów jest jednoznacznie rozwiązywalne. Ten fakt można wykorzystać do analizy statyki ram.

Wycinamy węzły ramy i zaczepiamy siły podłużne, poprzeczne oraz siły zewnętrzne skupione w węzłach. Teraz traktujemy siły poprzeczne- myślowo- jako siły zewnętrzne. Niech niewiadomymi będą tylko siły podłużne. Kiedy taki układ równań na siły podłużne jest rozwiązywalny ? Otóż wtedy, gdy

$$\overline{L}(\mathbf{P}, -\mathbf{T}) = 0 \tag{16}$$

gdzie **T** jest zestawem sił poprzecznych przywęzłowych. Minus przy **T** wynika stąd, że siły poprzeczne działają odwrotnie na węzły niż na pręty. Zapiszmy (16) korzystając z liniowości

$$\overline{L}(\mathbf{P}) - \overline{L}(\mathbf{T}) = 0 \tag{17}$$

Siły poprzeczne wykonują pracę na próbnych przemieszczeniach prostopadłych do prętów. Te przemieszczenia są określone przez s wybranych parametrów charakteryzujących ruchy zero-energetyczne kratownicy zastępczej. Równowaga prętów daje $\overline{L}(\mathbf{T}) = -\overline{L}(\mathbf{M}) - \overline{L}(q)$, gdzie $\overline{L}(\mathbf{M})$ oznacza pracę wirtualną momentów przywęzłowych a $\overline{L}(q)$ pracę wirtualną obciążeń przęsłowych. Zatem

$$\overline{L}(\mathbf{M}) + \overline{L}(q, \mathbf{P}) = 0 \tag{18}$$

czyli dochodzimy do znanych łańcuchów kinematycznych. Widzimy więc, że spełnienie (18) jest równoważne warunkom rozwiązywalności układu równań równowagi węzłów. Powyższe tłumaczy krótką wypowiedź Prof. Z.Reiperta na postawione w tytule pytanie.

6. Równania zginania ram poddanych dużym siłom osiowym

Równanie (17) pozostaje prawdziwe w teorii Bleicha ram obciążonych dużymi siłami osiowymi S_j. Istotnie, po pierwsze $\overline{L}(\mathbf{S}) = 0$ jest warunkiem stosowalności tej teorii. Ten warunek zapewnia: a) brak zginania od sił S_j ; b) możliwość obliczenia sił podłużnych w prętach wywołanych tymi siłami. Ponadto siły poprzeczne są w tej teorii odnoszone do konfiguracji początkowej dzięki czemu równania równowagi węzłów przyjmują tę samą postać co w liniowej teorii statyki ram. Zatem równanie (17) wynika stąd, że $\overline{L}(\mathbf{P}, \mathbf{S}, -\mathbf{T}) = 0$ oraz $\overline{L}(\mathbf{S}) = 0$. Zapis (17) daje więc s równań metody przemieszczeń ram zginanych przy obecności dużych sił osiowych. Można też skorzystać z równań równowagi każdego z prętów

$$\overline{L}(T_k) + \overline{L}(M_k) + S_k l_k \psi \,\overline{\psi}_k + \overline{L}(q_k) = 0 \tag{19}$$

(tutaj k jest numerem pręta) zapisanych w konfiguracji odkształconych, co przekształca (17) do znanej postaci, stosowanej od wielu lat w dydaktyce mechaniki budowli, por.[7].

7. Drgania harmoniczne ram płaskich o ciągłym rozkładzie masy

Równanie (17) jest pomocne w liniowej teorii drgań harmonicznych ram płaskich. Równanie to należy uzupełnić o pracę sił bezwładności skierowanych wzdłuż prętów. Wówczas równań tych nie da się przeformułować do postaci zależnej od amplitud **M**, gdyż do równań ruchu prętów interweniują rozkłady przyspieszeń co tylko komplikuje dalsze postępowanie. Znamy jednak wzory transformacyjne na amplitudy **T**, więc równanie (17) uzupełnione o amplitudy **U** podłużnych sił bezwładności ma postać

$$\overline{L}(\mathbf{P},\mathbf{U},-\mathbf{T})=0 \tag{20}$$

gdzie **P** to wektor amplitud sił skupionych w węzłach. Równania (20) są z powodzeniem stosowane w dydaktyce od połowy lat 80'tych. Wcześniej panował pogląd, że takich równań nie da się zapisać, co ograniczało dydaktykę do drgań ram ortogonalnych. Siła wzoru (20) uwidacznia się właśnie w analizie drgań ram nieortogonalnych. Zatem metoda przemieszczeń stosuje się z powodzeniem do ram nieortogonalnych podlegających deformacjom zgięciowym. Nie ma potrzeby rezygnacji z tej tematyki na korzyść MES, por. [8].

8. Drgania harmoniczne ram płaskich o punktowym rozkładzie masy

Jeśli dynamiczne stopnie swobody $\mathbf{u}_{m\times 1}$ ramy z prętów wydłużalnych sprowadzą się do dynamicznych stopni swobody $\mathbf{q}_{n\times 1}$ na skutek przyjęcia założenia niewydłużalności, to zapis **u=Aq** z prostokątną macierzą **A** o wymiarach *m* na *n,* gdzie *m>n* , zezwala na formalne dojście do równań ruchu wiążących niewiadome **q** przez zastosowanie znanego przekształcenia przez podobieństwo, np. $\mathbf{M_q}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{A}$, gdzie $\mathbf{M_q}$ jest macierzą kwadratową mas *n* na *n* ramy z prętów niewydłużalnych a **M** jest macierzą mas ramy z prętów wydłużalnych o wymiarach *m* na *m*. Takie podejście jest dydaktycznie niedobre, bo zmusza do jawnego rozpisywania prostokątnej macierzy **A** z dużą liczbą zer. Dlatego w dydaktyce należy polecić konstrukcję macierzy mas $\mathbf{M_q}$ na podstawie energii kinetycznej, por. [3]. Studentów uczy się wyrażać tę energię w postaci $\frac{1}{2}\sum q_i \mathbf{M}_{\mathbf{q}ij} q_j$ na podstawie analizy kinematycznej ramy; ta postać energii określa macierz mas jednoznacznie, z uwagi na jej cechę symetrii.

Macierz sztywności $\mathbf{K_q}$ konstruować należy na podstawie macierzy podatności $\mathbf{D_q}=\lfloor d_{ij}\rfloor$ jako $\mathbf{K_q}=(\mathbf{D_q})^{-1}$ a przemieszczenia d_{ij} można liczyć wszelkimi dostępnymi sposobami. Sens wielkości **q** jasno określa sens d_{ij}. Nie używamy tu oznaczeń δ_{ij} aby nie mylić $\mathbf{D_q}$ z macierzą podatności metody sił.

Powyższe zalecenia dydaktyczne dają jasne myślowo algorytmy analizy drgań harmonicznych ram nieortogonalnych z masami skupionymi. Wydaje się, że inne sposoby nauczania są błędne w tym sensie, że załamują się na zadaniach dotyczących ram nieortogonalnych.

Dobór **q** jest niejednoznaczny. Jeśli składowe **q** są kierowane względem globalnych obserwacji *x,y*, to zazwyczaj macierz $\mathbf{M_q}$ jest niediagonalna. Dobór **q** nie ma wpływu na wyniki końcowe, w tym na wyniki dotyczące częstości drgań własnych. Formalnie decyduje o tym twierdzenie z algebry liniowej mówiące o tym, że przekształcenie przez podobieństwo nie zmienia wartości własnych macierzy.

9. Uwagi końcowe

Metoda przemieszczeń może być stosowana w szerokim zakresie zagadnień mechaniki konstrukcji prętowych. Nie ma potrzeby uciekania w formalizm metod przybliżonych tam, gdzie decydują względy dydaktyczne. Przyjęcie założenia o niewydłużalności prętów upraszcza rozwiązywanie zadań ale nie jest konieczne, por.[3,5-8].

10. Literatura

1. Antman, S.S. *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, New York 1995.
2. Bhatt,P. *Structures*, 4th ed. Longman, 1999
3. Hetmański, Zastosowanie *Microsoft Excel* w mechanice konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2004.
4. Hibbeller, R.C. *Structural Analysis*. Prentice Hall. New Jersey. 2002.
5. Lewiński,T. On algebraic equations of elastic trusses, frames and grillages. *J.Theoret. Appl .Mech. (Mech.Teoret.Stos.)* **39**(2001), No 2, 307-322.
6. Lewiński,T. Przyczynek do teorii statyki ram i rusztów, *Theoretical Foundations of Civil Engineering-X.* Polish Ukraïnian Transactions Red.: W.Szcześniak, str. 293-302, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2002.
7. T.Lewiński,Równania statyki ram płaskich poddanych dużym siłom osiowym, W: B.Rymsza, V.I.Andrejev,Red. *Teoretyczne Podstawy Budownictwa.* XI Polsko-Rosyjskie Seminarium, Warszawa, 3.07.-6.07.2002, str.67-72. Izdat.Ass. Str.Vuzov. Moskwa 2002.
8. T.Lewiński, Harmonic vibrations of frames. An approach aimed at symbolic computation. In: *Lightweight Structures in Civil Engineering- Contemporary Problems. International Colloquium.* Org. by Polish Chapter of International Association for Shell and Spatial Structures [Warsaw, 12-14 September], pp. 174-177. Edited by J.B.Obrębski, Micro-Publisher Jan B. Obrębski Wydawnictwo Naukowe, 2005.
9. Sobol, E., Red., *Słownik Wyrazów Obcych. Wydanie Nowe*, PWN Warszawa 1997.

REMARKS ON TEACHING MECHANICS OF FRAMES GRILLAGES AND TRUSSES

The subject of the paper are selected topics of the lectures on structural analysis like: interrelation between equilibrium equations of a bar of finite length and the relevant virtual work equation, the concatenation of the virtual work equations for the members to form the total virtual work equation for a bar system, the Maxwell-Mohr formula treated as a variational equation of compatibility of deformations and displacement fields, determinacy of the longitudinal forces in frames undergoing flexural deformations and its relation to equilibrium equations corresponding to the sways of the frames, construction of equations of motion of arbitrary frames with longitudinally stiff members and equilibrium equations corresponding to sways of frames subjected to large axial forces, within the Bleich approach.

The paper suggests keeping the level of education within these topics to prevent from shifting them to the incoherent formalism of the computational mechanics subjects, where the borderlines between the theory and numerical approximations are usually get muddied.